

Unidad N° 7

VIGAS COMPUESTAS O REFORZADAS

7.1. Objetivos

Al terminar el estudio de esta unidad usted deberá ser capaz de resolver los siguientes objetivos trazados para el Estudio de tensiones en secciones de viga compuesta por distintos materiales.

1. Efectuar el análisis tensional en la sección transversal de viga compuesta, identificando las tensiones normales y cortantes que se producen en los distintos materiales (Diagramas Tensionales).
2. Aprender a transformar la sección transversal real compuesta por distintos materiales en una sección equivalente compuesta de un solo material.
3. Determinar momentos máximos y corte máximo que es capaz de resistir la sección transversal.

7.2. Introducción

Las vigas cuya sección transversal esta construida por dos o más materiales diferentes se la denomina **Vigas compuestas o Reforzadas**. Su importancia de estas secciones es que varios de los materiales de construcción soportan distintas tensiones de compresión y de tracción, entre estos materiales figura el hormigón, la madera, algunos metales y plásticos. Además de que como ingenieros se busca optimizar las cualidades de los materiales. El caso más conocido es el del Hormigón armado, que las debilidades que tiene el hormigón para absorber tensiones de tracción se busca que sean absorbidas por el acero.

La teoría de la flexión estudiada no se puede aplicar directamente a las vigas de secciones compuestas, ya que se habrán dado cuenta estas se basan en las Hipótesis de continuidad, homogeneidad, isotropía y en especial la Hipótesis de bernoulli que define que las secciones planas deben permanecer planas después del proceso de la deformación, es decir que las deformaciones deben ser proporcionales a la distancia a la línea neutra. Lo cual no cumple las secciones de viga compuesta.

La metodología que se va a seguir para el estudio de vigas compuestas es la transformación de la sección compuesta de distintos materiales en una sección equivalente homogénea de un solo material a la que se aplique directamente las ecuaciones que gobiernan la flexión. Para poder cumplir con las hipótesis antes mencionadas debemos basarnos en dos principios fundamentales de transformación:

1^{er} Principio.- Las deformaciones de los materiales que componen la sección compuesta debe ser la misma

2^{do} Principio.- La capacidad de carga de los materiales que componen la sección compuesta debe ser la misma

7.3. Formulación

Supongamos una viga de sección compuesta de dos materiales, madera y acero firmemente asegurados de forma que no pueda haber deslizamiento entre ambos materiales, como muestra la figura 7.3.1.

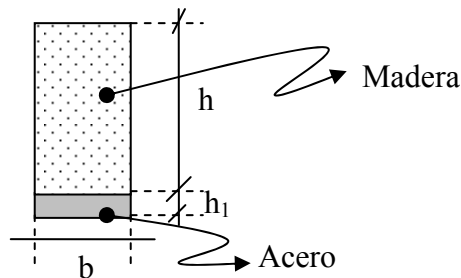


FIG. 7.3.1
Sección Real de
Madera y Acero

Lo que se quiere lograr es transformar la sección compuesta en una sección homogénea equivalente donde se cumpla las hipótesis de resistencia de materiales y se puedan aplicar directamente las formulas de flexión. Para lograr este objetivo aplicaremos a la sección los dos principios:

1^{er} Principio.- Deformaciones iguales.

$$\epsilon_m = \epsilon_a \quad (7.3.1)$$

ϵ_m = Deformación unitaria Madera

ϵ_a = Deformación unitaria Acero

Sabemos de las unidades 1 y 2 que:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (a)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (b)$$

$$\Delta L = \frac{N * L}{E * A} \quad (c)$$

reemplazando la expresión (b) en (c) tenemos:

$$\Delta L = \frac{\sigma * L}{E} \quad (d)$$

reemplazando la expresión (d) en (a) tenemos:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma * \cancel{L}}{E * \cancel{L}} \longrightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E}} \quad (e)$$

reemplazando la expresión (e) en (7.3.1) tenemos:

$$\frac{\sigma_m}{E_m} = \frac{\sigma_a}{E_a} \longrightarrow \sigma_a = \frac{E_a}{E_m} \sigma_m$$

$$\boxed{n = \frac{E_a}{E_m}} \quad (7.3.2.) \longrightarrow \boxed{\sigma_a = n \sigma_m} \quad (7.3.3.)$$

2^{do} Principio.- Capacidad de cargas iguales.

$$\boxed{N_m = N_a} \quad (7.3.4.)$$

$N_a =$ Capacidad de Carga Acero

$N_m =$ Capacidad de Carga Madera

sabemos de la unidad 1 que:

$$N = A * \sigma \quad (f)$$

reemplazando en 7.3.4. tenemos:

$$A_m * \sigma_m = A_a * \sigma_a \quad (g)$$

por ultimo reemplazando 7.3.3 en (g) tenemos:

$$A_m * \cancel{\sigma_m} = A_a * (n * \cancel{\sigma_m}) \longrightarrow \boxed{A_m = n * A_a} \quad (7.3.5.)$$

que es la ecuación que gobierna las transformaciones de secciones reales compuestas a secciones equivalentes homogéneas. **La cual significa que para convertir un área real de acero en un área equivalente de madera es necesario multiplicar esta área en “n” veces. Cuyo valor “n” esta en función de la relación de módulos de elasticidad que existen, ver expresión 7.3.2.**

aplicando esta expresión a la sección de la Fig. 7.3.1. tenemos:

Ing. G. Elías Belmonte C.

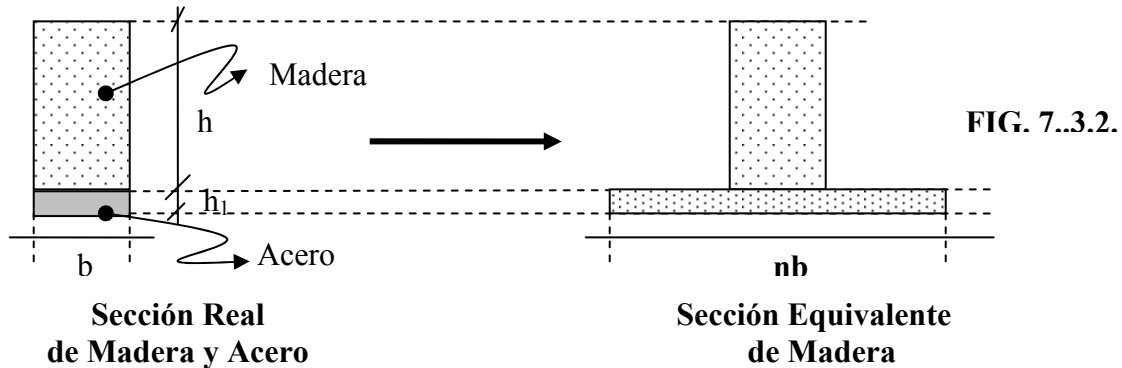
- **Transformación a sección Equivalente Madera**

$$A_m = n * A_a \longrightarrow A_m = n * (b * h_1)$$

Considerando h_1 constante podemos escribir la expresión de la siguiente manera:

$$A_m = h_1 * (n * b)$$

Lo que transforma a la sección como muestra la Fig. 7.3.2.



- **Transformación a sección Equivalente Acero**

$$A_m = n * A_a \longrightarrow A_a = \frac{1}{n} A_m \Rightarrow A_a = \frac{1}{n} (h * b)$$

Considerando h constante podemos escribir la expresión de la siguiente manera:

$$A_a = h * \left(\frac{b}{n} \right)$$

Lo que transforma a la sección como muestra la Fig. 7.3.3.

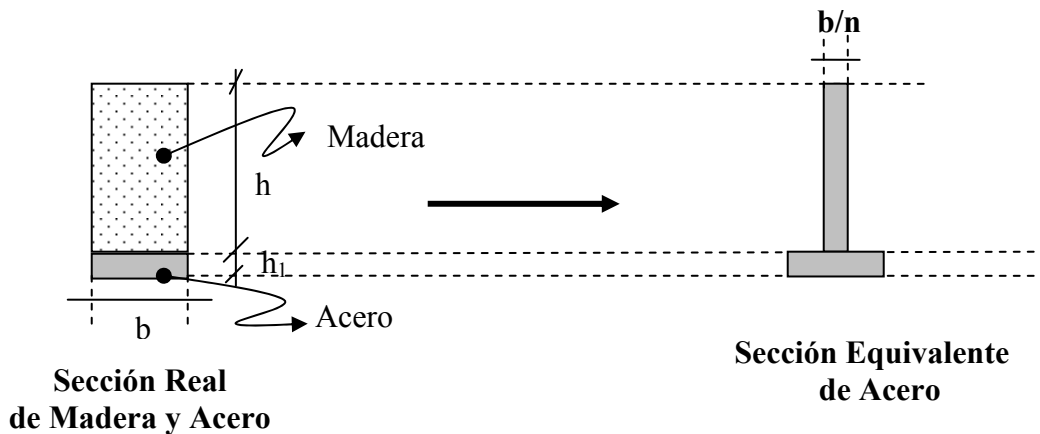


FIG. 7.3.3.

Para el caso que se analice tensiones de corte debido a flexión el procedimiento es el mismo lo único que varía en las expresiones son las tensiones de corte que remplazan a las tensiones normales quedando las expresiones de la siguiente manera:

Ing. G. Elías Belmonte C.

$$n = \frac{E_a}{E_m} \quad (7.3.2.a)$$

$$\tau_a = n \tau_m \quad (7.3.3.a)$$

$$A_m = n^* A_a \quad (7.3.5.a)$$

7.4. Transformación en secciones equivalentes

La transformación de secciones reales compuestas por distintos materiales en secciones equivalentes de un mismo material (homogéneas), se lo realiza siguiendo la expresión 7.3.5 y el procedimiento del anterior inciso, se simplifica partiendo del conocimiento de que todas las ecuaciones de flexión como las estudiadas en esta unidad están referidas a la línea neutra por lo cual las alturas deben ser constantes y no pueden variar en dimensión. Por consiguiente las únicas dimensiones que pueden variar son las bases (b_i) de los distintos materiales que componen la sección. Existiendo varios casos que plantearemos a continuación como queda la expresión 7.3.5.

7.4.1 Sección compuesta por dos materiales

Este es el caso que desarrollamos la expresión 7.3.5. De forma simplificada haciendo solamente la transformación de las bases queda

$$b_i^e = n b_i^r$$

b_i^e = base (i) equivalente

b_i^r = base (i) real

E_r = Modulo de elasticidad real

E_e = Modulo de elasticidad equivalente

(7.3.6.)

$$n = \frac{E_r}{E_e}$$

7.4.2 Sección compuesta por “n” materiales colocados de forma horizontal

En este caso existen varios factores “n” de transformación, tantos como materiales que esta compuesta la sección quedado la expresión 7.3.5. de la siguiente manera.

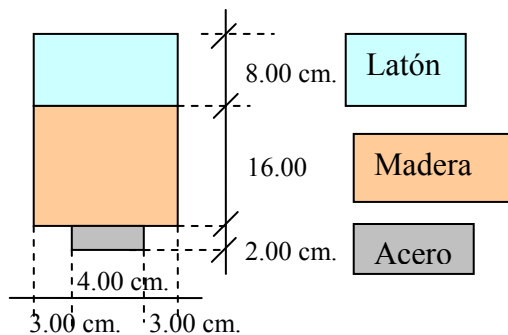
$$b_i^e = n_i b_i^r$$

(7.3.7.)

$$n_i = \frac{E_i^r}{E_i^e}$$

Ejemplo 1

Sea la sección de viga mostrada en la compuesta de tres materiales como muestra la Fig. transformar la sección a una sección equivalente de Madera.



DATOS

$$E_L = 1 \cdot 10^6 \text{ k/cm}^2$$

$$E_m = 1 \cdot 10^5 \text{ k/cm}^2$$

$$E_a = 2 \cdot 10^6 \text{ k/cm}^2$$

Solución:

a) Factores de transformación

$$n_1 = \frac{E_L}{E_m} = 10 \quad \text{Factor de latón a madera}$$

$$n_2 = \frac{E_m}{E_m} = 1 \quad \text{Factor de madera a madera}$$

$$n_3 = \frac{E_a}{E_m} = 20 \quad \text{Factor de acero a madera}$$

b) Transformación

- Latón a Madera

$$b_1^m = n_1 * b_1^L = 10 * 10 = 100 \text{ cm.}$$

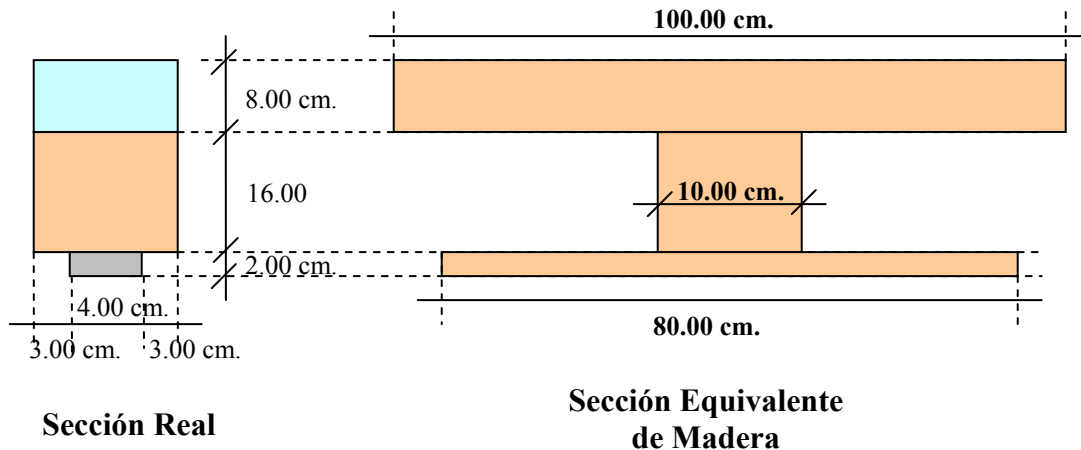
- Madera a Madera

$$b_2^m = n_2 * b_2^m = 1 * 10 = 10 \text{ cm.}$$

- Acero a Madera

$$b_3^m = n_3 * b_3^a = 20 * 4 = 80 \text{ cm.}$$

c) Sección equivalente Madera



Esta misma sección se puede transformar a cualquier otro material con tan solo tomar como base en el cálculo del factor de transformación el modulo de elasticidad del material que se desee convertir la sección y seguir el mismo procedimiento para el calculo de las nuevas bases.

7.4.3 Sección compuesta por “n” materiales colocados de forma Vertical

En este caso no podemos emplear directamente las expresiones 7.3.7. ya que al cortar la sección transversal compuesta nos encontramos con mas de una clase de materiales. Para dar solución a este caso y siguiendo el concepto de la ecuación 7.3.5. es que se utilizan las siguientes expresiones.

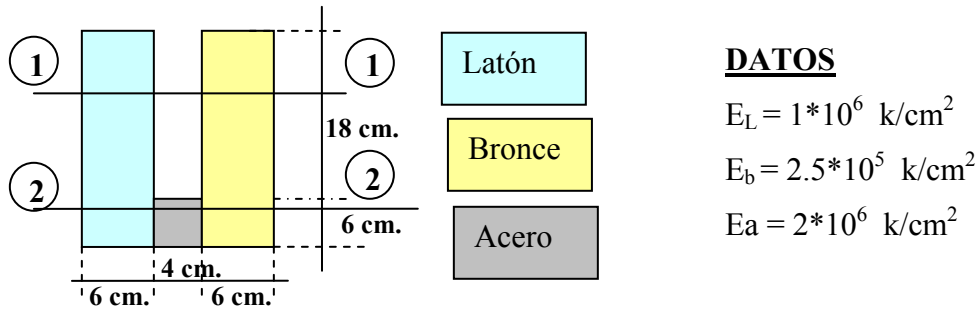
$$b_i^e = \sum n_i b_i^r$$

(7.3.7.)

$$n_i = \frac{E_i^r}{E_i^e}$$

Ejemplo 2

Sea la sección de viga mostrada en la compuesta de tres materiales como muestra la Fig. transformar la sección a una sección equivalente de Bronce.



Solución:

d) Factores de transformación

$$n_1 = \frac{E_L}{E_b} = 4 \quad \text{Factor de latón a bronce}$$

$$n_2 = \frac{E_b}{E_b} = 1 \quad \text{Factor de bronce a bronce}$$

$$n_3 = \frac{E_a}{E_b} = 8 \quad \text{Factor de acero a bronce}$$

e) Transformación

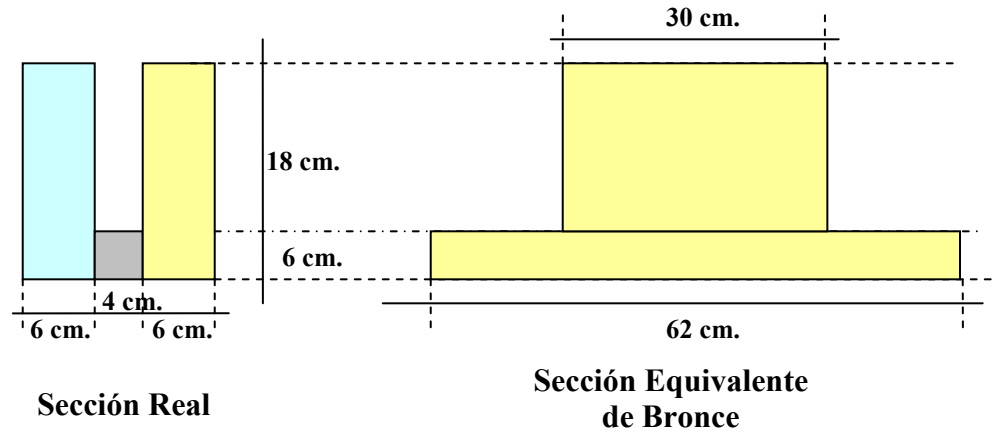
• Sección 1 – 1 (latón + bronce)

$$b_1^b = n_1 \cdot b_1^L + n_2 b_1^b = 4 \cdot 6 + 1 \cdot 6 = 30 \text{ cm.}$$

• Sección 2 – 2 (latón + acero + bronce)

$$b_1^b = n_1 \cdot b_1^L + n_3 b_1^a + n_2 b_1^b = 4 \cdot 6 + 8 \cdot 4 + 1 \cdot 6 = 62 \text{ cm.}$$

f) Sección equivalente Madera



7.5. Determinación de tensiones reales y capacidad carga

El procedimiento que se sigue es el mencionado en la parte introductiva de esta unidad. El cual de tallaremos a continuación:

- **Paso 1:** Transformación de la sección compuesta de varios materiales a una sección equivalente de un solo material.
- **Paso 2:** Mediante las ecuaciones que conocemos de flexión determinamos las tensiones normales y cortantes equivalentes para la sección equivalente.
- **Paso 3:** Una vez conocidas las tensiones equivalentes, mediante la expresión (7.3.3) y (7.3.3.a) las transformamos en tensiones reales para cada material

$$\sigma_i^r = n_i \sigma_i^e$$

Ecc. de transformación para las tensiones normales
(7.5.1.)

$$\tau_i^r = n_i \tau_i^e$$

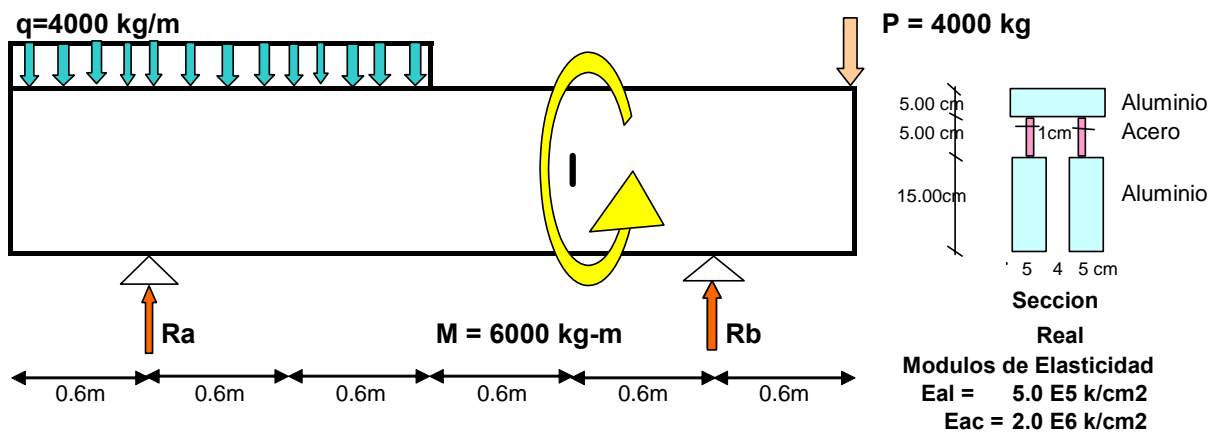
Ecc. de transformación para las tensiones cortantes
(7.5.2.)

Siguiendo el mismo procedimiento se calcula las capacidades de carga ya sea de momentos, como de fuerzas verticales. Una vez obtenido los valores máximos para cada material, se compara los valores y el menor será la capacidad que puede resistir tanto a momento, como a fuerza vertical la sección compuesta antes de romperse.

Ejemplo 3

Sea la viga cuya sección esta compuesta por dos materiales acero y aluminio como muestra la Fig. Determinar con las máximas solicitaciones lo siguiente:

- Diagrama de Tensiones normales
- Diagrama de tensiones cortantes
- Tensiones máximas



Solucion

1. Calculo de maximas solicitaciones

1.1. Calculo de reacciones

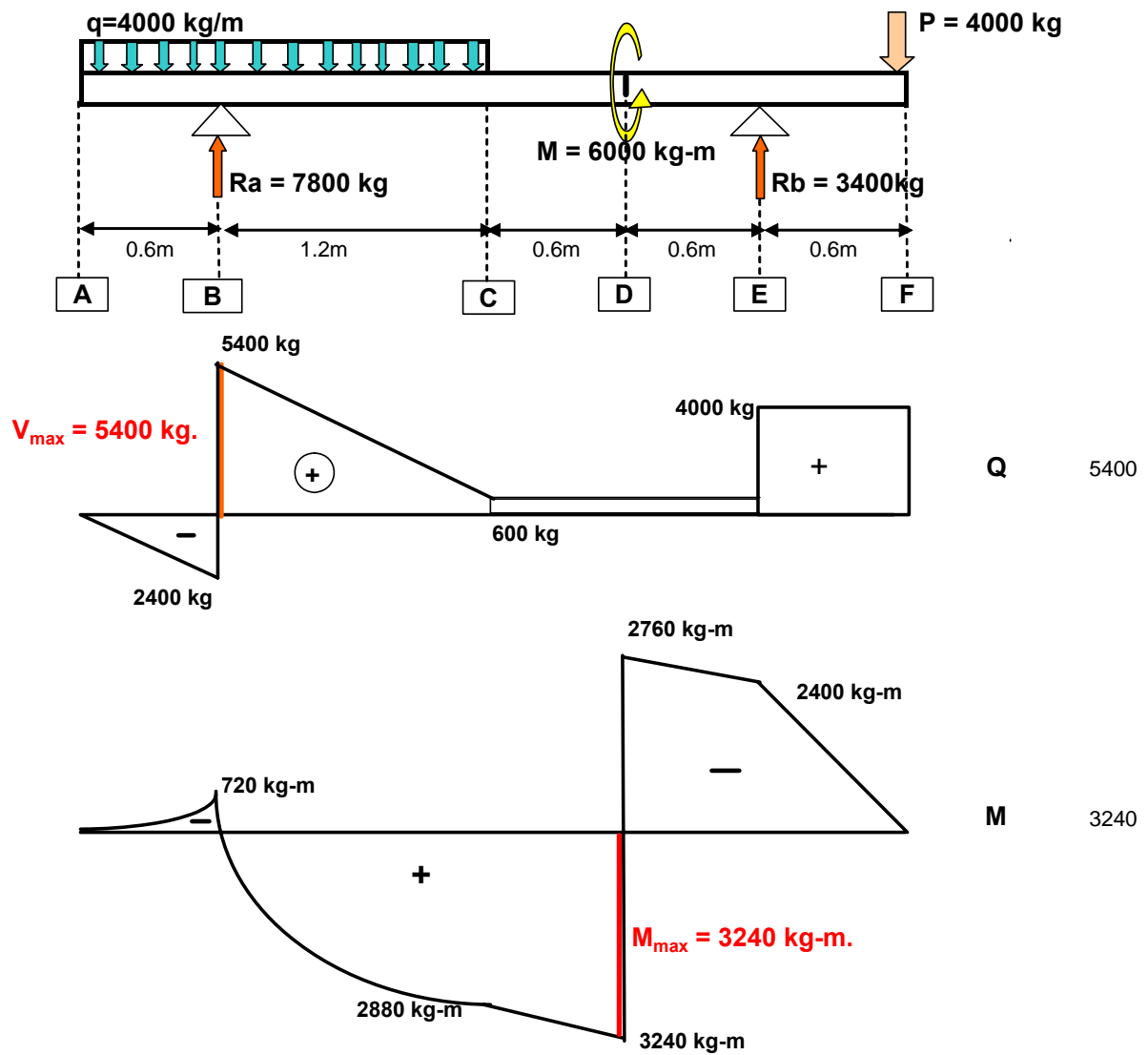
$$\sum M_a = 0$$

$$q \times 1.8 \times 0.3 - M + p \times 3.0 - R_b \times 2.4 = 0 \quad \longrightarrow \quad R_b = 3400 \text{ kg} \quad \uparrow$$

$$\sum V = 0$$

$$R_a + R_b - q \times 1.8 - p = 0 \quad \longrightarrow \quad R_a = 7800 \text{ kg} \quad \uparrow$$

1.2. Diagramas M y Q



1.2.1 Corte

$$Q_A = 0$$

$$Q_B^{\text{isq}} = -4000 \cdot 0.6 = 2400 \text{ kg}$$

$$Q_B^{\text{der}} = -4000 \cdot 0.6 + 7800 = 5400 \text{ kg}$$

$$Q_C = -4000 \cdot 0.6 + 7800 - 4000 \cdot 1.2 = 600 \text{ kg}$$

$$Q_F = +4000 \text{ kg}$$

$$Q_E^{\text{der}} = +4000 \text{ kg}$$

$$Q_E^{\text{isq}} = +4000 - 3400 = 600 \text{ kg}$$

1.2.2. Momento

$$M_A = 0$$

$$M_B = -4000 * 0.6 * \frac{0.6}{2} = -2400 \text{ kg-m}$$

$$M_C = -4000 * 1.8 * \frac{1.8}{2} + 7800 * 1.2 = 2880 \text{ kg-m}$$

$$M_F = 0$$

$$M_E = -4000 * 0.6 = -2400 \text{ kg-m}$$

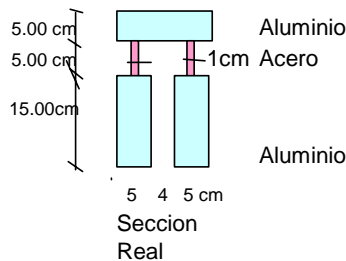
$$M_D^{\text{der}} = -4000 * 1.2 + 3400 * 0.6 = -2760 \text{ kg-m}$$

$$M_D^{\text{isq}} = -4000 * 1.2 + 3400 * 0.6 + 6000 = 3240 \text{ kg-m}$$

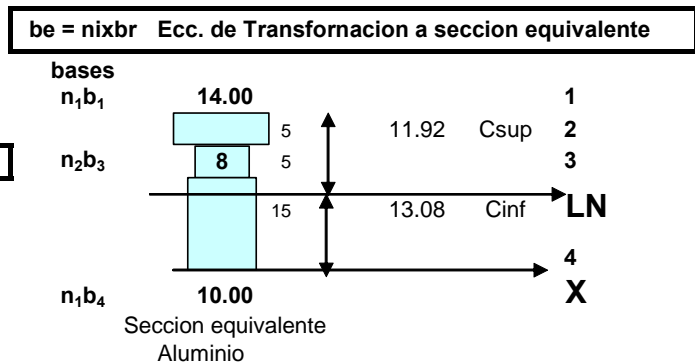
2. Transformacion de la seccion real en seccion equivalente

$$n_1 = E_{al} / E_{al} = 1.00$$

$$n_2 = E_{ac} / E_{al} = 4.00$$



be = nixbr

**3. Ubicación línea neutra en Seccion Equivalente**

$$C_{inf} = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$C_{inf} = 13.08 \text{ cm}$$

$$C_{sup} = 11.92 \text{ cm}$$

Areas	h	b	Yi	Ai	Igi	di=(Cinf - Yi)	Ini
F1	15.00	10.00	7.50	150.00	2812.50	5.58	7477.81
F2	5.00	8.00	17.50	40.00	83.33	-4.42	865.88
F3	5.00	14.00	22.50	70.00	145.83	-9.42	6361.44
	25.00			260.00			14705.13

4. Calculo de inercia en la línea neutra en la seccion Equivalente

$$I_{nT} = I_{n1} + I_{n2} + I_{n3}$$

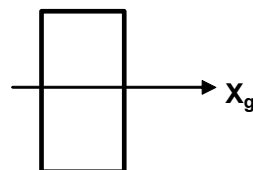
$$\text{Steiner} \quad I_{ni} = I_{gi} + A_i d_i^2$$

$$I_{n1} = 7477.81$$

$$I_{n2} = 865.88$$

$$I_{n3} = 6361.44$$

$$I_{nT} = 14705.13$$



Inercia baricentrica del rectangulo
 $I_g = bh^3/12$

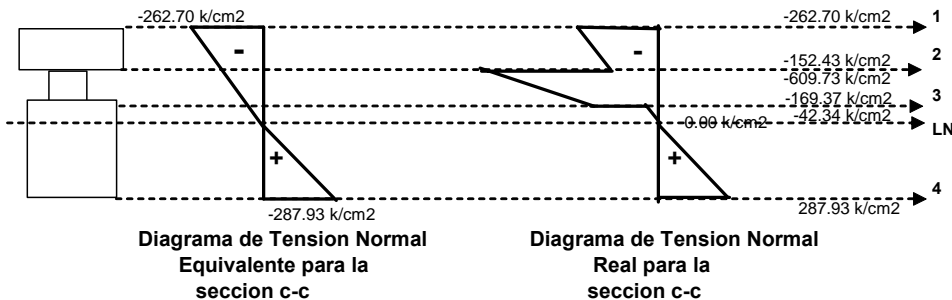
5. Calculo de Tensiones normales en la seccion c - c

$$\sigma_e = \frac{M_{c-c} C_i}{I_{nt}} \quad \text{Tension normal equivalente}$$

$$\sigma_r = n_i \sigma_e \quad \text{Tension normal real}$$

Seccion c-c	Materiales Reales	M _{max} k-m	C _i cm	I _{nt} cm ⁴	σ _e k/cm ²	n _i	σ _r k/cm ²
1	Aluminio	3240.00	11.92	14705.13	-262.70	1.00	-262.70
2s	Aluminio	3240.00	6.92	14715.13	-152.43	1.00	-152.43
2i	Acero	3240.00	6.92	14715.13	-152.43	4.00	-609.73
3s	Acero	3240.00	1.92	14715.13	-42.34	4.00	-169.37
3i	Aluminio	3240.00	1.92	14715.13	-42.34	1.00	-42.34
Ln	Aluminio	3240.00	0.00	14715.13	0.00	1.00	0.00
4	Aluminio	3240.00	13.08	14715.13	287.93	1.00	287.93

5.1. Diagramas de Tensiones Nomaes



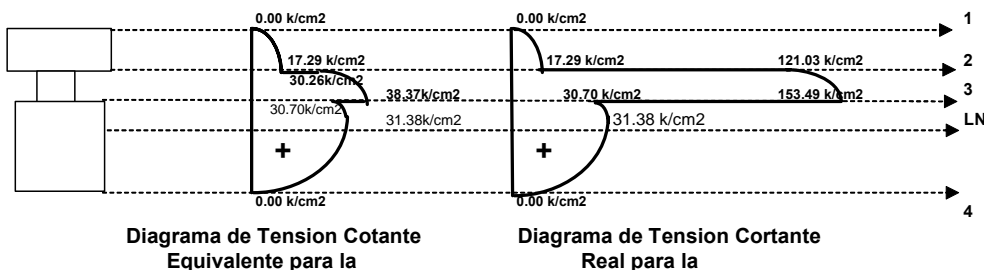
6. Calculo de Tensiones de Corte en la seccion c - c

$$\tau_e = \frac{V_{c-c} M_e}{b_i I_{nt}} \quad \text{Tension cortante equivalente}$$

$$\tau_r = n_i \tau_e \quad \text{Tension cortante real}$$

Seccion c-c	Materiales Reales	V _{max} k	M _e cm ³	I _{nt} cm ⁴	b _e cm ²	τ _e k/cm ²	n _i	τ _r k/cm ²
1	Aluminio	5400.00	0.00	14705.13	14.00	0.00	1.00	0.00
2s	Aluminio	5400.00	659.62	14715.13	14.00	17.29	1.00	17.29
2i	Acero	5400.00	659.62	14715.13	8	30.26	4.00	121.03
3s	Acero	5400.00	836.54	14715.13	8	38.37	4.00	153.49
3i	Aluminio	5400.00	836.54	14715.13	10	30.70	1.00	30.70
Ln	Aluminio	5400.00	855.03	14715.13	10	31.38	1.00	31.38
4	Aluminio	5400.00	0.00	14715.13	10	0.00	1.00	0.00

6.1. Diagramas de Tensiones de Corte en la seccion c - c



7. Tensiones Maximas

7.1. Tensiones maximas normales

$$\sigma_{\max}^{\text{acero}} = -609.73 \text{ k/cm}^2$$

$$\sigma_{\max}^{\text{aluminio}} = -287.93 \text{ k/cm}^2$$

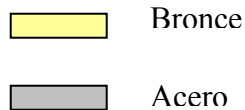
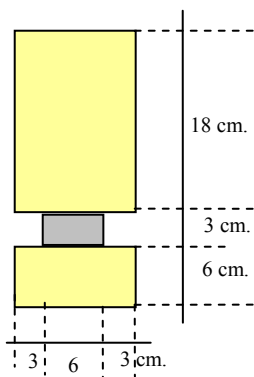
7.1. Tensiones maximas cortantes

$$\tau_{\max}^{\text{acero}} = 153.49 \text{ k/cm}^2$$

$$\tau_{\max}^{\text{aluminio}} = 31.38 \text{ k/cm}^2$$

• Ejemplo 4

Se la sección de viga compuesta mostrada en la Fig. Determinar el **momento flexor máximo** y la **fuerza de corte máxima** capaz de soportar:



Datos

$$\sigma_{\text{adm}}^a = 1200 \text{ k/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{adm}}^b = 300 \text{ k/cm}^2$$

$$\tau_{\text{adm}}^a = 400 \text{ k/cm}^2$$

$$\tau_{\text{adm}}^h = 100 \text{ k/cm}^2$$

$$E_b = 2.5 \cdot 10^5 \text{ k/cm}^2$$

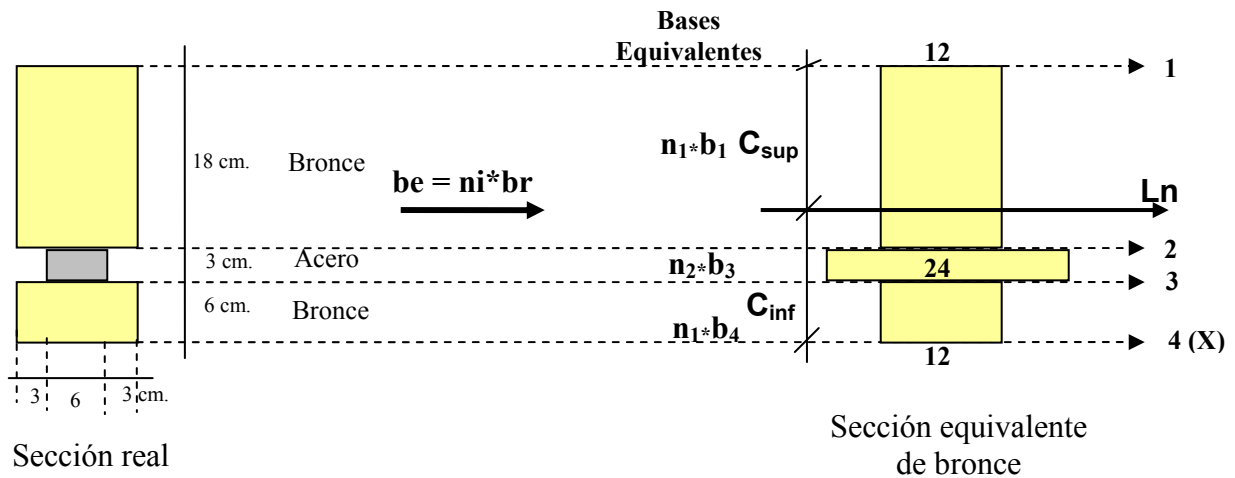
$$E_a = 2 \cdot 10^6 \text{ k/cm}^2$$

Solución:

1. Transformación en sección equivalente

$$n_1 = \frac{E_b}{E_b} = 1$$

$$n_2 = \frac{E_a}{E_b} = 4$$



2. Calculo de ubicación y de inercia en L_n de la sección equivalente

FIGURA	h	b	A	Yi	A*Yi	I_g	$Ai*d^2$
1	18	12	216	18	3888	5832	5618,16
2	3	24	72	7,5	540	54	2099,52
3	6	12	72	3	216	216	7056,72
	27		360		4644	6102	14774,4

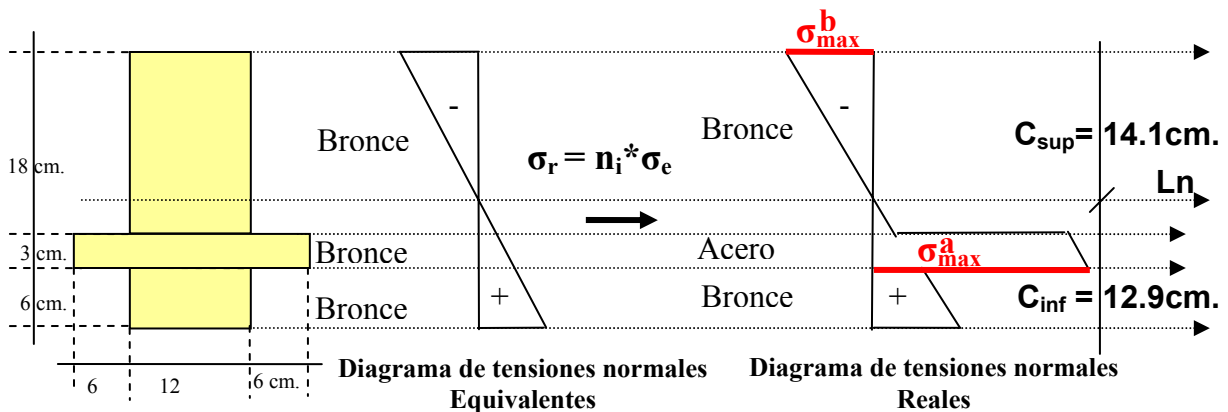
$C_{inf} = 12,9 \text{ cm.}$
 $C_{sup} = 14,1 \text{ cm.}$
 $I_{Ln} = 20876,40 \text{ cm}^4.$

3. Calculo de momento máximo

Se parte del cocimiento que tenemos de que:

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{adm}$$

3.1 Diagrama de tensiones normales



Como vemos en el diagrama de tensiones normales, las **tensiones máximas** quedaran ubicadas siempre en las **fibras mas alejadas de cada material de la Ln**. Por consiguiente serán las tensiones que producirán los momentos máximos para los distintos materiales como veremos a continuación:

3.2. Momento máximo que es capaz de soportar el acero

$$\sigma_{\max}^a \leq \sigma_{\text{adm}}^a$$

$$\sigma_{\max}^a = n_2 * \sigma_e = n_2 * \frac{M_{\max}^a * C_{\max}^a}{I_{Ln}} = \sigma_{\text{adm}}^a \Rightarrow M_{\max}^a = \frac{\sigma_{\text{adm}}^a * I_{Ln}}{n_2 * C_{\max}^a}$$

$$M_{\max}^a = \frac{1200 * 20876.40}{4 * 6.9} = 907669.57 \text{ k - cm} = 9076.70 \text{ k - m}$$

3.3. Momento máximo que es capaz de soportar el bronce

$$\sigma_{\max}^b \leq \sigma_{\text{adm}}^b$$

$$\sigma_{\max}^b = n_1 * \sigma_e = n_1 * \frac{M_{\max}^b * C_{\max}^b}{I_{Ln}} = \sigma_{\text{adm}}^b \Rightarrow M_{\max}^b = \frac{\sigma_{\text{adm}}^b * I_{Ln}}{n_1 * C_{\max}^b}$$

$$M_{\max}^b = \frac{300 * 20876.4}{1 * 14.1} = 444178.72 \text{ k - cm} = 4441.79 \text{ k - m}$$

3.4. Momento máximo que es capaz de soportar la sección de viga

Se elige el menor valor entre los momentos máximos que son capaces de soportar el acero y el bronce, este es debido a que es el máximo valor donde los materiales en conjunto son capaces de resistir de forma conjunta sin fallar ninguno de ellos.

$$M_{\max} \leq M_{\max}^a, M_{\max}^b$$

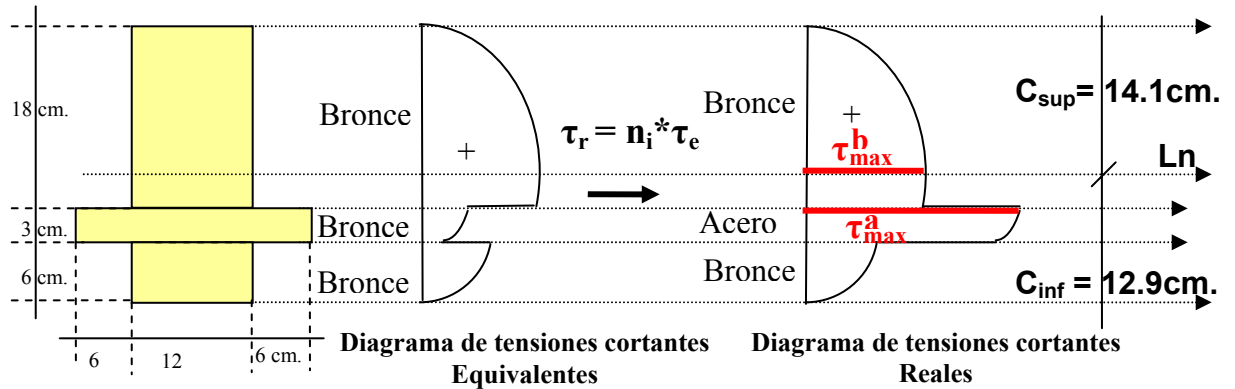
$$M_{\max} = 4441.79 \text{ k-m}$$

4. Calculo de fuerza vertical máxima

Se parte del cocimiento que tenemos que:

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\text{adm}}$$

4.1. Diagrama de tensiones cortantes



Como vemos en el diagrama de tensiones cortantes, las **tensiones máximas** quedan ubicadas en las **fibras más próximas de cada material a la Ln**. Esta regla no es general hay que estar pendientes de las variaciones de tensiones que pueden producir las bases. Por consiguiente para este caso es mejor analizar el diagrama de tensiones que nos indicara donde se producirán las tensiones cortantes máximas para los distintos materiales como veremos a continuación:

4.2. Fuerza vertical máxima que es capaz de soportar el acero

$$\tau_{\max}^a \leq \tau_{\text{adm}}^a$$

$$\tau_{\max}^a = n_2 * \tau_e = n_2 * \frac{V_{\max}^a * M_e^a}{I_{Ln} * b_e^a} = \tau_{\text{adm}}^a \Rightarrow V_{\max}^a = \frac{\tau_{\text{adm}}^a * I_{Ln} * b_e^a}{n_1 * M_e^a}$$

$$M_e^a = M_e^{Ln} = (12 * 6) * 9.9 + (24 * 3) * 5.4 = 1101.6 \text{ cm}^3$$

$$V_{\max}^a = \frac{400 * 20876.4 * 24}{4 * 1101.6} = 45482.35 \text{ k}$$

4.3. Fuerza vertical máxima que es capaz de soportar el bronce

$$\tau_{\max}^b \leq \tau_{\text{adm}}^b$$

$$\tau_{\max}^b = n_1 * \tau_e = n_1 * \frac{V_{\max}^b * M_e^b}{I_{Ln} * b_e^b} = \tau_{\text{adm}}^b \Rightarrow V_{\max}^b = \frac{\tau_{\text{adm}}^b * I_{Ln} * b_e^b}{n_1 * M_e^b}$$

$$M_e^b = M_e^{Ln} = (12 * 14.1) * 14.1/2 = 1192.86 \text{ cm}^3$$

$$V_{\max}^b = \frac{100 * 20876.4 * 12}{1 * 1192.86} = 21001.36 \text{ k}$$

4.4 Fuerza vertical máxima que es capaz de soportar la sección de viga

Con el mismo principio que para momentos se elige la fuerza vertical menor entre los máximos de cada material ósea:

$$V_{\max} \leq V_{\max}^a, V_{\max}^b$$

$$V_{\max} = 21001.36 \text{ k-m}$$